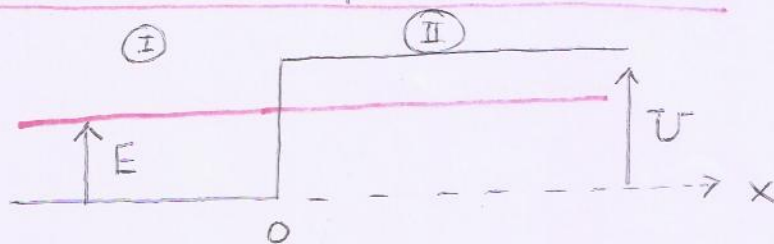


Comentario sobre $|\Psi|^2$ en el potencial escalón

1

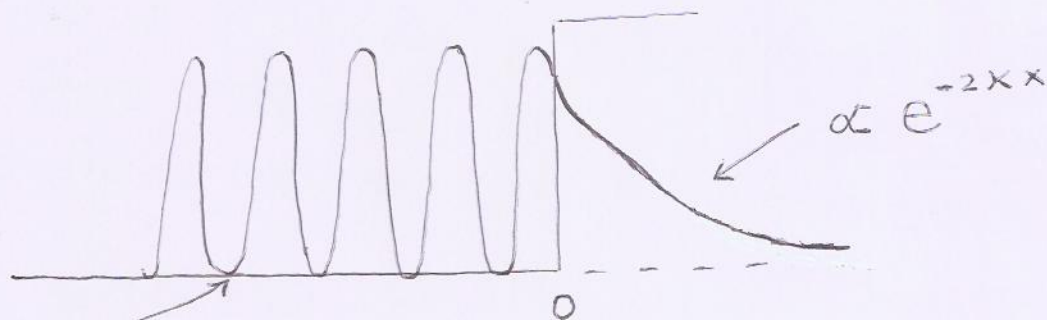
Cuando $E < U$,



la función de onda $\Psi_I(x,t)$ es una onda estacionaria ^(oscila en x)

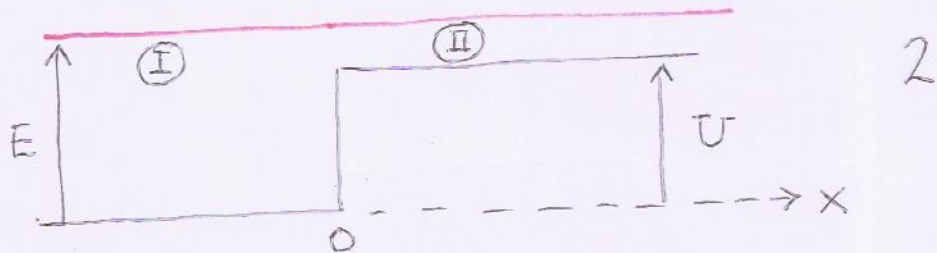
y $|\Psi_I(x,t)|^2 = 4A^2 \cos^2(kx + \frac{\alpha}{2})$, mientras que

$|\Psi_{II}(x,t)|^2 = D^*D e^{-2\kappa x}$ que también es una onda estacionaria que decae en x .



Los nodos de $|\Psi_I(x,t)|^2$ no se mueven porque $\Psi_I(x,t)$ es una onda estacionaria: el flujo incidente en $x=0$ es igual al flujo reflejado.

Cuando $E > U$



la función de onda en la región $\textcircled{\text{I}}$, es decir, $\Psi_{\text{I}}(x,t)$ no es una onda estacionaria: el flujo incidente en $x=0$ es mayor que el flujo reflejado porque hay flujo transmitido. Sin embargo, $\Psi_{\text{I}}(x,t)$ puede escribirse como la superposición de una onda estacionaria mas una onda viajera que se mueve en la dirección positiva del eje x . Veamos un ejemplo.

Supongamos que $k_{\text{I}} = 2k_{\text{II}}$ (1).

Previamente se obtuvo que para $E > U$

$$\Phi_{\text{I}}(x) = A e^{ik_{\text{I}}x} + B e^{-ik_{\text{I}}x} ; k_{\text{I}} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (2)$$

$$\Phi_{\text{II}}(x) = C e^{ik_{\text{II}}(x)} ; k_{\text{II}} = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} \quad (3)$$

$$\text{con } \frac{B}{A} = \frac{k_{\text{I}} - k_{\text{II}}}{k_{\text{I}} + k_{\text{II}}} \quad (4) \quad \text{y} \quad \frac{C}{A} = \frac{2k_{\text{I}}}{k_{\text{I}} + k_{\text{II}}} \quad (5)$$

Considerando todas las ecuaciones anteriores se puede escribir

3

$$\Phi_I(x) = A e^{i(2k_{II}x)} + \frac{A}{3} e^{-i(2k_{II}x)} \quad (6)$$

$$\Phi_{II}(x) = \frac{4A}{3} e^{ik_{II}x} \quad (7)$$

Hay que recordar que $\Psi_{II}(x,t) \rightarrow = \Phi_{II}(x) e^{-iEt/\hbar}$ es una onda viajera que se mueve en la región (II) hacia la derecha, cuya densidad de probabilidad $|\Psi_{II}(x,t)|^2 = \frac{16}{9} |A|^2$ es una cantidad constante.

La otra cosa importante es que la función de onda en la región (I) , $\Psi_I(x,t) = \Phi_I(x) e^{-iEt/\hbar}$, puede escribirse como una onda estacionaria más una onda viajera hacia la derecha, esto es:

$$\Phi_I(x) = \underbrace{\left(\frac{A}{3} e^{i(2k_{II}x)} + \frac{A}{3} e^{-i(2k_{II}x)} \right)}_{\text{Onda estacionaria}} + \underbrace{\frac{2}{3} A e^{i(2k_{II}x)}}_{\text{Onda viajera}} e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \quad (8)$$

Con respecto a la onda estacionaria

$$\frac{A}{3} e^{i(2k_{II}x)} + \frac{A}{3} e^{-i(2k_{II}x)} = \frac{2A}{3} \cos(2k_{II}x) \quad (9)$$

Con respecto a la onda viajera

$$\frac{2}{3} A e^{i(2k_{II}x)} = \frac{2}{3} A \cos(2k_{II}x) + i \frac{2}{3} A \text{Sen}(2k_{II}x) \quad (10)$$

(8), (9) y (10) \Rightarrow

$$\Phi_{\text{I}}(x) = \left(\frac{4}{3} A \cos(2k_{\text{II}}x) + i \frac{2}{3} A \text{Sen}(2k_{\text{II}}x) \right) e^{-i \frac{Et}{\hbar}} \quad (11),$$

de donde

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{I}}(x,t)|^2 &= \frac{16}{9} |A|^2 \cos^2(2k_{\text{II}}x) + \frac{4}{9} |A|^2 \text{Sen}^2(2k_{\text{II}}x) \\ &= \frac{4}{9} |A|^2 \cos^2(2k_{\text{II}}x) + \frac{12}{9} |A|^2 \cos^2(2k_{\text{II}}x) + \frac{4}{9} |A|^2 \text{Sen}^2(2k_{\text{II}}x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Psi_{\text{I}}(x,t)|^2 = \frac{4}{9} |A|^2 + \frac{12}{9} |A|^2 \cos^2(2k_{\text{II}}x) \quad (12)$$

Observamos que, al contrario del caso $E < U$, en el caso $E > U$, la función de onda en la región I tiene una densidad de probabilidad $|\Psi_{\text{I}}(x,t)|^2$ asociada que nunca es cero. Compare con los resultados que se muestran en la página 1 de este documento.

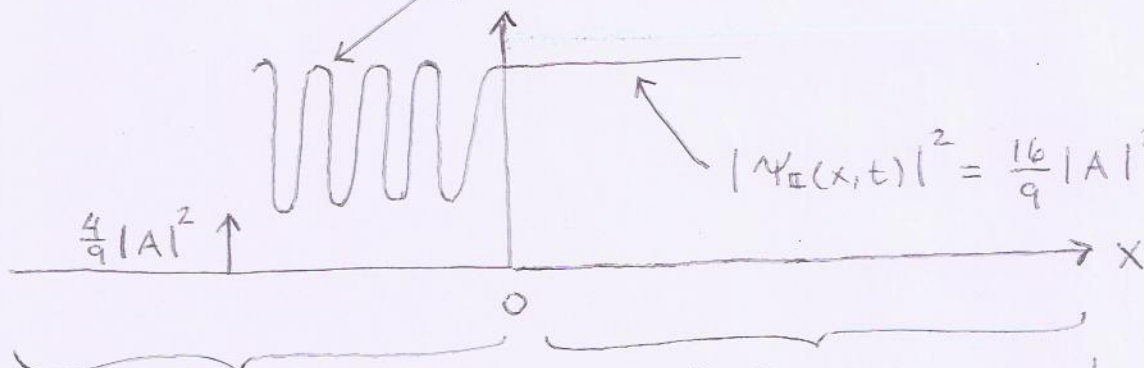
Además, a partir de la ecuación (7) podemos calcular la densidad de probabilidad en la región (II) dando

$$|\Psi_{\text{II}}(x,t)|^2 = \frac{16}{9} |A|^2 \quad (13)$$

Con (12) y (13) podemos hacer el gráfico de $|\psi|^2$

$$|\Psi_I(x,t)|^2 = \frac{4}{9}|A|^2 + \frac{12}{9}|A|^2 \cos^2(2kx)$$

$$|\Psi_{II}(x,t)|^2 = \frac{16}{9}|A|^2$$



Onda estacionaria + Onda viajera en la dirección positiva del eje x

Onda viajera en la dirección positiva del eje x